

## soulmate game 一個簡單測試默契程度的遊戲

規則如下：

1. 雙方交換一個十元硬幣，各自準備一張紙。
2. 遊戲開始前雙方可以約定或不約定任何協議（隨手摘的花花瓣有幾個，經過窗前的鳥有幾隻，現在氣溫是幾度...）作為要畫 O 或 X 的依據，但是遊戲開始後就不能互相溝通（說話、打暗號、使眼色...）提到自己擲到正面還是反面。
3. 遊戲開始。
4. 雙方不能互相偷看，各自擲硬幣，把硬幣正面或反面記下，然後根據之前約定或沒約定的協議，在旁邊畫 O 或 X 的符號。
5. 雙方畫完 O 或 X 後，重複 4 的動作，重複二十次後，遊戲結束。
6. 雙方一起看這兩張紙，分數計算方式如下。根據自己和對方每次的擲幣，這二十次的每一輪我和對方的擲幣會有四類：正面正面、正面反面、反面正面、反面反面。計算每一類之下雙方畫的符號是一樣的比例，所以現在有四個數字： $p$  正正、 $p$  正反、 $p$  反正、 $p$  反反。遊戲分數為： $p$  正正 -  $p$  正反 -  $p$  反正 -  $p$  反反。
7. 遊戲分數即為默契程度，越大越有默契；如果大於零，就是 soul mate。簡單說，目的就是藉著”心電感應”告訴對方我擲的是正面還是反面，而且都是正面的時候彼此都畫一樣的符號，其他情況都畫不一樣的符號，因此完美的 soul mate 可以讓  $p$  正正=1.0、 $p$  正反=0、 $p$  反正=0、 $p$  反反=0，拿到最高分 1.0。

以下為延伸閱讀。

1. 物理學上來說，這個遊戲是實驗自己和對方之間是否有量子糾纏（quantum entangle）的現象。所謂量子糾纏或心有靈犀，白話文的意思就是某種超越時空（超越光速縱橫古今）的資訊交換，而且這個資訊交換雙方自己又無法察覺。
2. 機率學上來說，如果自己決定要畫 O 或 X 的資訊不包含對方擲十元硬幣的結果，這個遊戲的分數一定小於等於零；稱之為 Bell 不等式，證明：

以  $a$  表示甲畫的符號， $b$  表示乙畫的符號， $A$  表示甲和乙先前講好的策略協議， $c$  表示其他甲單方面的決定因素， $d$  表示乙其他單方面的決定因素， $A, c, d$  都沒有對方投擲結果的資訊。

所以甲擲到正面時候畫的符號是  $a(\text{正}, A, c)$ ，甲擲到反面時候畫的符號是  $a(\text{反}, A, c)$ ，乙擲到正面時候畫的符號是  $b(\text{正}, A, d)$ ，乙擲到反面時候畫的符號是  $b(\text{反}, A, d)$ 。

因為事件

$$"a(\text{正}, A, c) \neq b(\text{反}, A, d) \cap b(\text{反}, A, d) \neq a(\text{反}, A, c) \cap a(\text{反}, A, c) \neq b(\text{正}, A, d)"$$

意味著

事件" $a(\text{正}, A, c) \neq b(\text{正}, A, d)$ "

所以事件" $a(\text{正}, A, c) = b(\text{正}, A, d)$ "

意味著

事件" $a(\text{正}, A, c) = b(\text{反}, A, d) \cup b(\text{反}, A, d) = a(\text{反}, A, c) \cup a(\text{反}, A, c) = b(\text{正}, A, d)$ "

因此

$$\begin{aligned} & \text{prob}(a(\text{正}, A, c) = b(\text{正}, A, d)) \\ & \leq \text{prob}(a(\text{正}, A, c) = b(\text{反}, A, d)) + \text{prob}(b(\text{反}, A, d) = a(\text{反}, A, c)) + \text{prob}(a(\text{反}, A, c) = b(\text{正}, A, d)) \end{aligned}$$

3. 因此，除非雙方藉由設置一個量子糾纏的裝置，或是雙方腦子裡就有這種裝置能夠心有靈犀，否則分數必定小於等於零。
4. 第一步交換一個十元硬幣只是好玩，其實可以用任意的 0/1 機率事件去代替，例如抽得一張撲克牌的顏色。
5. 利用 A. Aspect 在 1982 年所作的量子實驗裝置（一個發射偏振光子的鈣離子，[http://en.wikipedia.org/wiki/Alain\\_Aspect](http://en.wikipedia.org/wiki/Alain_Aspect)）來讓分數大於零的方式請看 p12,18 <http://www.math.ru.nl/~maassen/lectures/qp.pdf>