Hedge Finder for arbitrary model: a tree implement

本論文提出一個針對一般模型都可以使用的評價方法·

給定一個 martingale 模型,一般而言評價的數值方法有三種—模擬、PDE 或 Tree、直接積分出數學式子—但是不管是哪一種,都是為了計算 $\mathrm{E}\left[\frac{P}{N}\right]$,其中 P 是 product 的 payoff,N 是 Numeraire 的價值·然而因為數值方法各自精確度參數的問題(例如在模擬或 PDE 的場合,step 的大小和模擬次數的大小),martingale 的性質常會因此有所誤差(例如當 BGM 模型使用模擬當 BGM vol 過大的時候,模型 IRS 的價格都很難重合至 yield curve 所認定的價格)·既然 martingale 模型會因為實務上的使用變成具有非 martingale 的誤差,或許一個針對非 martingale 的模型也能實作的方法會有所優勢·所以針對新方法的企圖,第一個要求便是不需要要求模型為 martingale·如果針對模型已經有個 Tree 的表達方式,對於 american 或 bermudan 的產品,使用上會比較方便,因此新方法的第二個要求便是這個方法容許我們使用 backward induction 的技巧來處理主觀 optionality 的問題·

所謂模型,其實只是描述市場報價如何演化運動的數學描述,姑且不管描述是否正確或精細,在此定義之下,其實任何人都可以很容易有一個模型;這就是即使沒受過財務工程訓練的歐巴桑也自稱是 trader 的緣故,一個歐巴桑的模型可能只是,如果某人說話,那 2330 明天就一定漲;進一步地把這個模型精細化可能只是把這個漲幅和某人講話的頻率做個機率上的設定,然後為”某人沒說話”的狀況做一個預設的 2330 運動的設定,一個純粹實證觀點的 jump-diffusion 模型就完成了·但是就應用面而言,隨便給一個未必是 martingale 的模型要如何 pricing 呢?我們需要一個不用計算 $\mathrm{E}\left[\frac{P}{N}\right]$的方法才有這樣的可行性·這樣的方法已經由此定理說出方向了:

Fundamental theorem of financial engineering:
Denote the profit and loss (PL) of the hedge portfolio up to time t as H_t, the value of the num´eraire at time t as N_t, the value of the product at time t as P_t. If at some time horizon T, the random variable $\frac{\mathrm{P}_T+\mathrm{H}_T}{\mathrm{N}_T}$ is a constant, k, then

$$\mathrm{P}_0 = k \times \mathrm{N}_0$$

Proof. Trivial.

此定理說明的方向便是:給定一個模型,我們要針對商品特性和模型特性設計一個避險計畫,目標是盡可能的把$\frac{P+H}{N}$固定·

大致上來說，本文的方法如下：
Step 1，藉由模擬模型產生一個對應的 Tree 的表達方式．
Step 2，在這個 Tree 上做 backward induction．

詳細說明如下．

如何由模型產生對應的 Tree．

1. 給定一個時間尺度的離散化，clock，從現在到 maturity 分成 C 步，模擬 n 次，所以會有 $1 + \mathrm{C} \times \mathrm{n}$ 個狀態點，每個狀態點除了市場因子以外還有此商品需要的狀態變數．
2. 定義一個距離來衡量任意兩個狀態點之間的遠近．
3. 對每一個 clock 而言，給定一個 cluster 的數目 cn(clock)，把這一個 clock 的 n 個狀態點，按照距離的大小，分成 cn(clock)堆，在每一堆的重心定義一個樹上的狀態點．所以在樹上時刻為 clock 的地方有 cn(clock)個狀態點．
4. 樹上的兩個狀態點之間有連線的定義是那兩個 cluster 在上述 1 裡有連線．

如果 clock、C、n、cn(clock)皆趨於無限，這個 Tree 表現就越接近此模型．

如何在 Tree 上做 backward induction．

1 定義每個狀態點的編號．在每一個點都有一個用 numeraire 來當作衡量單位的 value．在編號 i 的狀態點的 value 計做V_i．在 end clock 的各狀態點的 value 為 $\frac{P_T}{N_T}$．

2 從 now clock 到 end clock -1 的每個狀態點都要有避險作為，也就是根據選定的 H 個使用的避險工具的確切的避險工具的部位．這些避險工具一單位部位以 numeraire 來衡量在編號 i 的狀態點的 value 計為$\mathrm{h}_i(1) \ldots \mathrm{h}_i(\mathrm{H})$．避險計畫就是預先計畫每個狀態點的避險作為．

3 假設狀態點 i 在下一個 clock 有 J 個狀態點，編號為$j_1 \ldots j_J$．目前已知$V_{j_1} \ldots \mathrm{V}_{j_J}$．決定$V_i$ 的方法如下．

4 如果$\mathrm{J} \geq 1 + \mathrm{H}$．

  4.1 直接回歸V_j against 1、$\mathrm{h}_j(1) \ldots \mathrm{h}_j(\mathrm{H})$，得到迴歸係數$\beta_0 \ldots \beta_H$．

  4.2 $V_i \stackrel{\text{def}}{=} \beta_0 + \beta_1 \times \mathrm{h}_i(1) + \cdots + \beta_H \times \mathrm{h}_i(\mathrm{H})$

5 如果$\mathrm{J} < 1 + \mathrm{H}$．

  5.1 把 numeraire 視為第 0 號避險工具，所以$\mathrm{h}_i(0) \equiv 1$，$\mathrm{h}_j(0) \equiv 1$．

  5.2 對每一個避險工具$\mathrm{h}_j(0 \ldots \mathrm{H})$單獨回歸$\mathrm{V}_j$得到迴歸誤差．

  5.3 選擇回歸誤差最小的 J 個避險工具來避險，計作$H_1 \ldots H_J$．

  5.4 直接回歸V_j against $\mathrm{h}_j(H_1) \ldots \mathrm{h}_j(H_J)$，得到迴歸係數$\beta_1 \ldots \beta_J$

  5.5 $V_i \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1 \times \mathrm{h}_i(H_1) + \cdots + \beta_J \times \mathrm{h}_i(H_J)$

6 如果為 american 或 bermudan 商品，在此即以$\max(0, V_i)$取代V_i．

7 從 end clock -1 一直往前 backward induction．現在狀態點的 value 得到後，再乘以N_0即為評價數字．

8 避險計畫在此 Tree 上的避險作為由過程中已經求得．各狀態點的β就是該狀態點避險部位的大小，現在當下的避險部位由現在狀態點的β得知．

此方法可以重造避險工具的市場價值．因為如果被評價商品剛好是某項避險工具，上述方法在每個狀態點的最佳回歸就是該避險工具的β為 1 其他避險工具的β為 0，而且回歸誤差此時為零．

此方法也可建議商品 bid/ask 的叫價．因為回歸誤差就是避險誤差而且不是零，所以我們可以根據現在狀態點的回歸誤差取個 5%-percentile（一個負數）和 95%-prcentile（一個正數）的數值，乘以N_0再加上原本的評價即得到 bid price 和 ask price；在以 bid price 買入商品之後配上避險計畫，會有 5%仍然虧錢的可能性，在以 ask price 賣出商品之後配上避險計畫，會有 5%仍然虧錢的可能性．